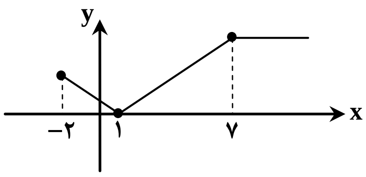
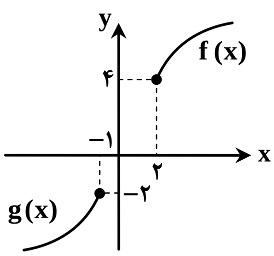
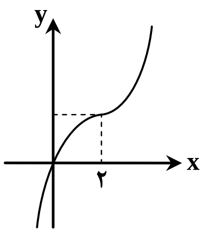
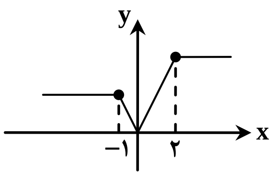
ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y=f(\frac{x}{2})$، از انقباض افقی تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. ب) اگر طول و عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید. پ) تابع $y=\log(2-x)$ در دامنهٔ خود، اکیداً صعودی است. ت) باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای x^6-8x^3+3x-1 بر $x-2$، برابر ۲ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) نقطهٔ $A(2,3)$ روی نمودار $y=f(x)$، با نقطهٔ .... روی نمودار $y=2f(\frac{x}{3})$ متناظر است. ب) تابع $f(x)=\|x+1\|-\|x-1\|$ در R از نظر یکنوایی، تابعی .... است. پ) اگر چندجمله‌ای x^3+ax^2-16 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a برابر .... است. ت) عبارت درجه اول .... ، یک عامل تجزیهٔ چندجمله‌ای x^5+32 است.	۱
۳	نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. الف) نمودار $y=f(1-3x)$ را رسم کنید. ب) دامنهٔ آن را به‌دست آورید.  	۱
۴	نقطهٔ $A(2,3)$، یک نقطه از نمودار تابع $y=-f(3x+1)$ است. مختصات نقطهٔ A' متناظر با نقطهٔ A روی نمودار $y=f(x)$ را به‌دست آورید.	۱
۵	در شکل مقابل، تابع g فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+4$ به‌دست آمده است. ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.  	۱/۵
۶	نمودار تابع $y=x^2-3x+1$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم و سپس در راستای قائم، ۵ واحد به‌سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقاط برخورد نمودار نهایی با محور xها را به‌دست آورید.	۱/۵
۷	طول نقاط روی نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال می‌دهیم. مراحل انتقال را به‌ترتیب انجام داده و تابع جدید را به‌دست آورید.	۱/۵

ردیف		نمره
۸	الف) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۱-\sqrt[۳]{x} & x\le ۱\\ (x-۱)^۳ & x>۱\end{cases}$ را رسم کنید. ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی است را مشخص کنید. پ) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است را مشخص کنید.	۱/۵
۹	الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$، نشان دهید که $a\ge b$. ب) اگر $(\frac{۲}{۳})^x \le (۲/۲۵)^{۲x-۱}$، حدود x را تعیین کنید.	۲/۷۵
۱۰	نمودار تابع $f(x)=(x-a)^۳+b$ به‌صورت مقابل است. با نوشتن راه‌حل، مقادیر a و b را بیابید. 	۱/۵
۱۱	الف) نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(۱+\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.  ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است را تعیین کنید.	۱/۵
۱۲	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۴$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۳ باشد.	۱/۲۵
۱۳	اگر خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^{۱۰}-x^۵+۲x-۳$ بر $(x-۱)$، چندجمله‌ای $q(x)$ باشد، مقدار $q(-۱)$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۴	چندجمله‌ای $x^{۱۲}-۱$ را طوری تجزیه کنید که $x^۲+۱$ یک عامل آن باشد.	۱/۵

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

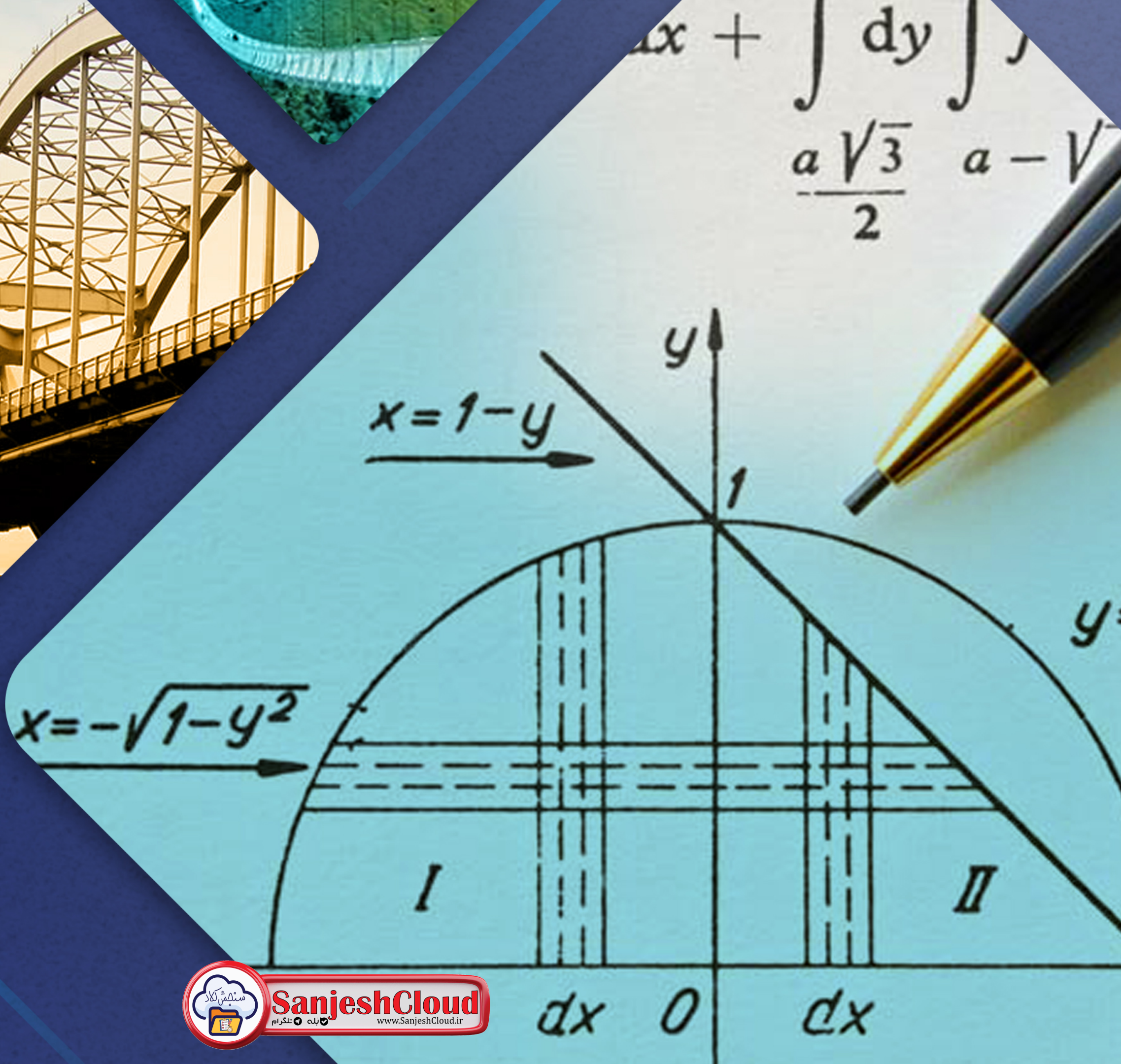
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

آبان ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

حسابان ۲ (رشته ریاضی و فیزیک)



۱۴۰۳_۱۴۰۴

۱-

الف) نادرست　　ب) درست　　پ) نادرست　　ت) نادرست

۲-

الف) $(۶,۶)$　　ب) صعودی　　پ) ۲　　ت) $x+۲$

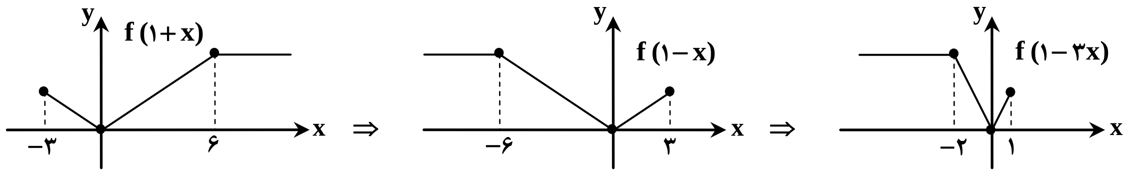
۳-

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.

نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.

الف) با توجه به این نکات در ۳ مرحله نمودار خواسته شده را رسم می‌کنیم:



ب) دامنه: $(-\infty,۱]$

۴-

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم.

راه‌حل اول:

نقطهٔ $A'(a,b)$ را روی نمودار $y=f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$y=f(x+۱)\quad,\quad A'_۱(a-۱,b)$$

$$y=f(۳x+۱)\quad,\quad A'_۲(\frac{a-۱}{۳},b)$$

$$y=-f(۳x+۱)\quad,\quad A'_۳(\frac{a-۱}{۳},-b)$$

پس $\frac{a-۱}{۳}=۲$ و $-b=۳$ است و در نتیجه $a=۷$ و $b=-۳$ است.

راه‌حل دوم:

مختصات نقطهٔ A را در تابع داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y=-f(۳x+۱)\xrightarrow[y=۳]{x=۲}۳=-f(۷)\Rightarrow f(۷)=-۳$$

پس نقطهٔ $A'(۷,-۳)$ روی نمودار $y=f(x)$ است.

۵-

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>۰$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k<۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انتقال دهیم.

نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}+۴$ نسبت به محورهای مختصات قرینه شده و سپس دو واحد به‌سمت بالا و یک واحد به‌سمت راست انتقال پیدا کرده است؛ بنابراین ضابطهٔ تابع g به‌صورت زیر است:

$$y=f(x)=\sqrt{x-۲}+۴\xrightarrow[-y]{x\to -x}y=-\sqrt{-x-۲}-۴\xrightarrow{y+۲}y=-\sqrt{-x-۲}-۲$$

$$\xrightarrow{x\to x-۱}y=-\sqrt{-(x-۱)-۲}-۲\Rightarrow g(x)=-\sqrt{-x-۱}-۲$$

-۶

نکته: اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم.

قرینه نسبت به محور yها:

$$y=(-x)^{2}-3(-x)+1=x^{2}+3x+1$$

۵ واحد پایین:

$$y=(x^{2}+3x+1)-5=x^{2}+3x-4$$

تقاطع با محور xها:

$$x^{2}+3x-4=0 \Rightarrow x=1,-4$$

-۷

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

برای آنکه طول نقاط را در $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم باید $f(3x)$ را تشکیل دهیم. برای آنکه نمودار را دو واحد به چپ انتقال دهیم باید به‌جای x، $x+2$ را قرار دهیم.

$$f(x)\xrightarrow{\text{طول نقاط ضرب در } \frac{1}{3}} f(3x)\xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}} f(3(x+2))=f(3x+6)$$

پس جواب $f(3x+6)$ است.

-۸

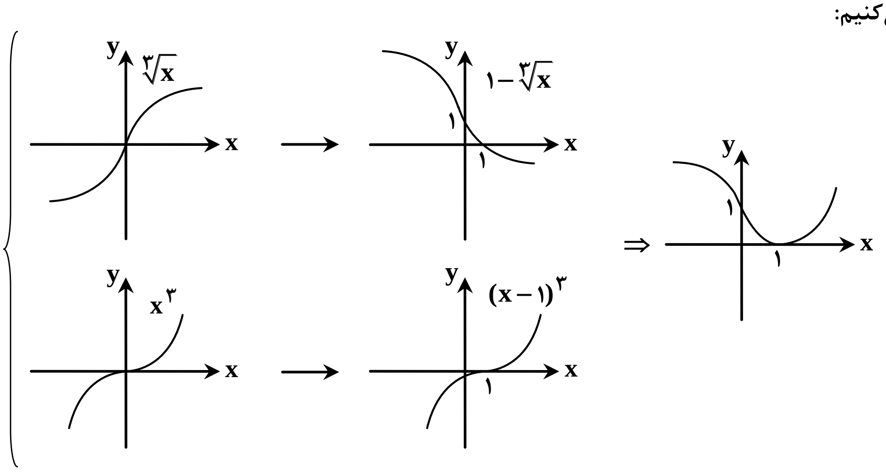
الف)

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به‌سمت پایین انجام می‌شود.

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

با انجام مراحل زیر، نمودار f را رسم می‌کنیم:



ب)

نکته: تابع f را در مجموعهٔ A ($A\subseteq D_f$) صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آن‌گاه $f(a)\le f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، رو به پایین نخواهیم رفت.

در بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی است.

پ)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آن‌گاه $f(a)>f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره رو به پایین خواهیم رفت.

در بازهٔ $(-\infty,1]$ اکیداً نزولی است.

-۹

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آن‌گاه $f(a)>f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آن‌گاه $f(a)<f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.

الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $a<b$ باشد. چون f اکیداً نزولی است، پس از $a<b$ نتیجه می‌گیریم که $f(a)>f(b)$ و این خلاف فرض مسأله است.

ب)

راه‌حل اول:

تابع a^x با فرض $۰<a<۱$ اکیداً نزولی است:

$$(\frac{۲}{۳})^x \le (\frac{۹}{۴})^{۲x-۱} \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^x \le (\frac{۳}{۲})^{۴x-۲} \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^x \le (\frac{۲}{۳})^{۲-۴x} \Rightarrow x \ge ۲-۴x \Rightarrow x \ge \frac{۲}{۵}$$

راه‌حل دوم:

تابع a^x با فرض $a>۱$ اکیداً صعودی است:

$$(\frac{۲}{۳})^x \le (\frac{۹}{۴})^{۲x-۱} \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^{-x} \le (\frac{۳}{۲})^{۴x-۲} \Rightarrow -x \le ۴x-۲ \Rightarrow x \ge \frac{۲}{۵}$$

-۱۰

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k<۰$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انتقال دهیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>۰$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به‌سمت بالا انتقال دهیم.

نمودار تابع $y=x^۳$، دو واحد به راست و b واحد به بالا منتقل شده است و نمودار آن از مبدأ عبور کرده است. پس $a=۲$ است.

$$y=x^۳ \xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} y=(x-۲)^۳ \xrightarrow{\text{b واحد به بالا}} f(x)=(x-۲)^۳+b$$

$$f(۰)=۰ \Rightarrow ۰=(-۲)^۳+b \Rightarrow b=۸$$

-۱۱

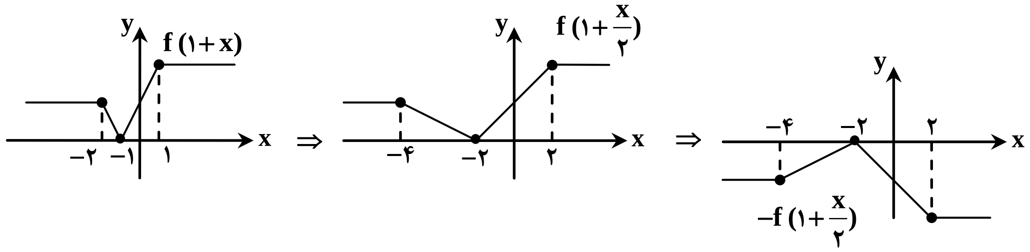
نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آن‌گاه $f(a)<f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $۰<k<۱$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به‌سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<۰$، این انتقال به اندازهٔ $|k|$ واحد به‌سمت راست انجام می‌شود.

نکته: اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

الف) با توجه به این نکات، نمودار را طی ۳ مرحله رسم می‌کنیم:



ب) در بازهٔ $[-۴,-۲]$ اکیداً صعودی است.

۱۲-

نکته (قضیه): باقی‌ماندۀ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از $r(x)=f(\frac{-b}{a})$.

با جای‌گذاری $x=-۲$ و $x=۱$ در $f(x)$ داریم:

$$\begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow f(-۲)=۰ \Rightarrow -۸+۴a-۲b-۴=۰ \Rightarrow ۲a-b=۶ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f(۱)=۳ \Rightarrow ۱+a+b-۴=۳ \Rightarrow a+b=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a-b=۶ \\ a+b=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۲ \end{cases}$$

۱۳-

نکته (قضیۀ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها): اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجۀ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

که در آن $r(x)=۰$ یا درجۀ $r(x)$ از درجۀ $p(x)$ کمتر است.

راه‌حل اول:

با نوشتن رابطۀ تقسیم داریم:

$$f(x)=(x-۱)q(x)+r \xrightarrow{x=۱} \begin{cases} f(۱)=r \\ f(۱)=۱-۱+۲(۱)-۳=-۱ \end{cases} \Rightarrow r=-۱$$

حالا برای به‌دست آوردن $q(-۱)$، x را برابر (-۱) قرار داده و در تابع جای‌گذاری می‌کنیم.

$$f(x)=(x-۱)q(x)-۱ \xrightarrow{x=-۱} f(-۱)=(-۱)^{۱۰}-(-۱)^{۵}+۲(-۱)-۳=-۳$$

$$-۳=(-۱-۱)q(-۱)-۱ \Rightarrow -۲=-۲q(-۱) \Rightarrow q(-۱)=۱$$

راه‌حل دوم:

تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} x^{۱۰}-x^{۵}+۲x-۳ & x-۱ \\ \quad\vdots & \overline{x^{۹}+x^{۸}+x^{۷}+x^{۶}+x^{۵}+۲} \\ \hline \qquad -۱ & \end{array}$$

$$q(x)=x^{۹}+x^{۸}+x^{۷}+x^{۶}+x^{۵}+۲ \xrightarrow{x=-۱} q(-۱)=۱$$

۱۴-

نکته: اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، x^n-a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^{۲}x^{n-۳}-\cdots+a^{n-۲}x-a^{n-۱})$$

فرض کنید $x^{۲}=t$ باشد:

$$x^{۱۲}-۱=t^{۶}-۱=(t+۱)(t^{۵}-t^{۴}+t^{۳}-t^{۲}+t-۱)=(x^{۲}+۱)(x^{۱۰}-x^{۸}+x^{۶}-x^{۴}+x^{۲}-۱)$$